POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI
I NAUK INFORMACYJNYCH

Proponowane rozwiązania
Matura 2013
MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

Autorzy:
Kamil Kosiba
Tomasz Kostrzewa
Wojciech Ożański
Agnieszka Piliszek
Michał Zwierzyński

Warszawa, maj 2013

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Rozwiąż nierówność $|2x - 5| - |x + 4| \leqslant 2 - 2x$.

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy nierówność:

$$|2x - 5| - |x + 4| \leqslant 2 - 2x$$

- Pierwszy przypadek:

$$2x - 5 \geqslant 0 \quad \wedge \quad x + 4 \geqslant 0$$
$$2x \geqslant 5 \quad \wedge \quad x \geqslant -4$$
$$x \geqslant 2.5 \quad \wedge \quad x \geqslant -4$$

  Co jest równoważne $x \geq 2.5$. Wówczas otrzymujemy następującą nierówność:

$$2x - 5 - (x + 4) \leqslant 2 - 2x$$
$$2x - x + 2x \leqslant 2 + 9$$
$$3x \leqslant 11$$
$$x \leqslant 3\frac{2}{3}$$

- Drugi przypadek:

$$2x - 5 \geqslant 0 \quad \wedge \quad x + 4 < 0$$

  Z warunków tych mamy, że

$$x \geqslant 2.5 \quad \wedge \quad x < -4.$$

  Jest to jednak sprzeczny układ nierówności.

- Trzeci przypadek:

$$2x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x + 4 \geqslant 0$$
$$x < 2.5 \quad \wedge \quad x \geqslant -4$$

  Otrzymujemy więc, że

$$-(2x - 5) - (x + 4) \leqslant 2 - 2x$$
$$x \geqslant -1$$

- Czwarty przypadek:

$$2x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x + 4 < 0$$

$$x < 2.5 \quad \wedge \quad x < -4$$

Zatem równanie wygląda następująco:

$$-(2x-5) + x + 4 \leqslant 2 - 2x$$

$$x \leqslant -7$$

Ze wszystkich czterech możliwych przypadków otrzymujemy ostateczną odpowiedź

$$x \in \left\langle 2.5; 3\frac{2}{3} \right\rangle \vee x \in \langle -1; 2.5) \vee x \in (-\infty; -7\rangle ,$$

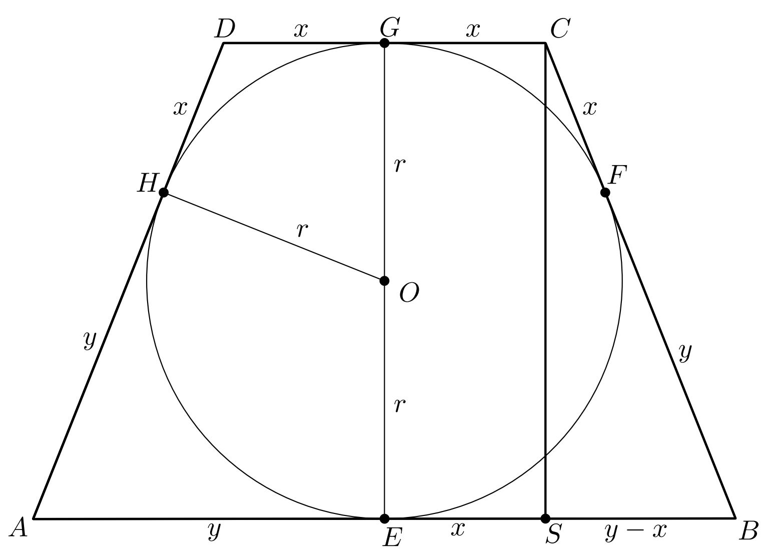
którą możemy zapisać w następujący sposób:

$$x \in (-\infty \ ; \ -7\rangle \cup \left\langle -1 \ ; \ \frac{11}{3} \right\rangle$$

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

Rozwiązanie:



Oznaczmy przez S spodek wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB oraz przez E, F, G, H punkty w których okrąg wpisany jest styczny do boków trapezu. Z twierdzenia o odcinkach stycznych widzimy, że:

$$|DG| = |DH|, \ |CG| = |CF|, \ |BF| = |BE|, \ |AE| = |AH|$$

Ponieważ trapez jest równoramienny, więc punkty G i E dzielą boki DC i AB na połowy. Stąd możemy wprowadzić oznaczenie:

$$|DG| = |DH| = |CG| = |CF| = x, \ |BF| = |BE| = |AE| = |AH| = y$$

Ponadto czworokąt $ESCG$ jest prostokątem, więc $|ES| = |GC| = x$ i dostajemy $|SB| = y - x$. Ponieważ wysokość trapezu opisanego na okręgu jest równa podwojonej długości promienia to korzystając z twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta CSB mamy:

$$(2r)^2 + (y-x)^2 = (x+y)^2$$
$$4r^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2$$
$$4r^2 = 4xy$$

Wracając do naszych oznaczeń dostajemy, że $2x = |CD|$ i $2y = |AB|$, czyli dostajemy:

$$4r^2 = (2x)(2y) = |AB| \cdot |CD|$$

Zadanie 3. (*3 pkt*)

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Rozwiązanie:

Mamy sześć pozycji na których będziemy umieszczać cyfry:

1	2	3	4	5	6

Najpierw na pozycjach $2, 3, 4, 5, 6$ rozmieszczamy dowolnie trzy zera (nie rozmieszczamy zera na pozycji 1). Możemy to zrobić na $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ sposobów.
Następnie na trzech pozostałych pozycjach, które zostały, umieszczamy gdzieś cyfrę 5 - możemy to zrobić na 3 sposoby.
Zostały nam dwie pozycje, na których w sposób dowolny umieszczamy cyfry (różne od 0 i od 5) - możemy to zrobić na $8 \cdot 8 = 64$ sposobów (bo na pierwszej wolnej pozycji ustawiamy jedną z ośmiu pozostałych cyfr, analogicznie na drugiej wolnej

pozycji).
Reasumując wszystkich liczb będzie:

$$10 \cdot 3 \cdot 64 = 1920$$

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru trygonometrycznego: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ i otrzymujemy:

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Gdzie k liczba całkowita.
Uwzględniając przedział $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ otrzymujemy rozwiązania:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Zadanie 5. (*5 pkt*)

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a - 1, b + 5, c + 19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Rozwiązanie:

Jeżeli (a, b, c) jest arytmetyczny, to zachodzi $b = a + r$ oraz $c = a + 2r$ dla pewnej liczby r.
Mamy więc ciąg $(a, a + r, a + 2r)$.
Ponieważ $a + b + c = 33$, to

$$a + a + r + a + 2r = 33$$

$$3a + 3r = 33$$
$$a + r = 11$$
$$a = 11 - r$$

Teraz ciąg $(a, a + r, a + 2r)$ możemy zapisać jako

$$(11 - r, 11 - r + r, 11 - r + 2r)$$
$$(11 - r, 11, 11 + r)$$

Zachodzą więc zależności: $a = 11 - r, b = 11, c = 11 + r$.
Ciąg $(a - 1, b + 5, c + 19)$ możemy zatem zapisać w postaci:

$$(11 - r - 1, 11 + 5, 11 + r + 19)$$
$$(10 - r, 16, 30 + r)$$

Z treści zadania wiemy, że jest to ciąg geometryczny.
Korzystamy z własności ciągu geometrycznego, według której każdy wyraz (oprócz pierwszego i ostatniego) podniesiony do kwadratu jest równy iloczynowi swoich sąsiadów:

$$16^2 = (10 - r)(30 + r)$$
$$256 = 300 + 10r - 30r - r^2$$
$$r^2 + 20r - 44 = 0$$
$$\Delta = 400 - 4 \cdot 1 \cdot 44 = 400 + 176 = 576 = 24^2$$
$$r_1 = \frac{-20 - 24}{2} = -22$$
$$r_2 = \frac{-20 + 24}{2} = 2$$

Dla $r = 2$ otrzymujemy $\begin{cases} a = 11 - r = 11 - 2 = 9 \\ b = 11 \\ c = 11 + r = 11 + 2 = 13 \end{cases}$

Dla $r = -22$ otrzymujemy $\begin{cases} a = 11 - r = 11 + 22 = 33 \\ b = 11 \\ c = 11 + r = 11 - 22 = -11 \end{cases}$

Zadanie 6. (*6 pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + 2(1 - m)x + m^2 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \leqslant 6m \leqslant x_1^2 + x_2^2$

Rozwiązanie:

Równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania wtedy gdy $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (2(1-m))^2 - 4(m^2 - m) \\
&= 4(1-m)^2 + 4m - 4m^2 \\
&= 4(1 - 2m + m^2) + 4m - 4m^2 \\
&= 4 - 4m > 0
\end{aligned}$$

Stąd $m < 1$. Skorzystamy ze wzorów Viete'a:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Mamy $a = 1$, $b = 2(1-m)$, $c = m^2 - m$, zatem, podstawiając pierwszy ze wzorów do nierówności $x_1 \cdot x_2 \leqslant 6m$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
m^2 - m &\leqslant 6m \\
m^2 - 7m &\leqslant 0 \\
m(m-7) &\leqslant 0
\end{aligned}$$

stąd $m \in \langle 0, 7 \rangle$.

Aby rozwiązać nierówność $6m \leqslant x_1^2 + x_2^2$ zauważmy, że $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, a więc $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} \\
&= 4(1-m)^2 - 2 \cdot (m^2 - m) \\
&= 4(1 - 2m + m^2) - 2m^2 + 2m \\
&= 2m^2 - 6m + 4
\end{aligned}$$

Podstawiając do rozwiązywanej nierówności mamy

$$\begin{aligned}
6m &\leqslant 2m^2 - 6m + 4 \\
0 &\leqslant 2m^2 - 12m + 4 \\
0 &\leqslant m^2 - 6m + 2
\end{aligned}$$

Mamy $\Delta = 36 - 4 \cdot 2 = 28$, więc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Zatem

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{6+2\sqrt{7}}{2} = 3+\sqrt{7} \\ m_2 &= \frac{6-2\sqrt{7}}{2} = 3-\sqrt{7} \end{aligned}$$

Stąd $m \in (-\infty, 3-\sqrt{7}\rangle$ lub $m \in \langle 3+\sqrt{7}, +\infty)$

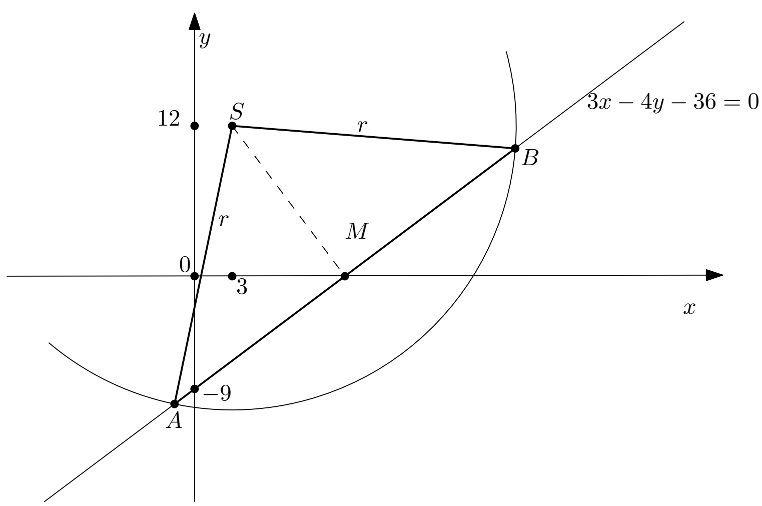
Z warunku na $\Delta > 0$ otrzymaliśmy, że $m < 1$, to, biorąc pod uwagę, że $3-\sqrt{7} < 1$, mamy, że $m \in (-\infty, 3-\sqrt{7}\rangle$. Uwzględniając ponadto $m \in \langle 0; 7\rangle$ otrzymujemy ostatecznie: $m \in \left\langle 0; 3-\sqrt{7}\right\rangle$.

Zadanie 7. (*4 pkt*)

Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3, 12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

Rozwiązanie:

Dowolny okrąg o środku w punkcie $S = (3, 12)$ ma równanie $(x-3)^2+(y-12)^2 = r^2$, gdzie r jest długością promienia okręgu. Zadanie sprowadza się do obliczenia r^2.



Niech M oznacza rzut punktu S na zadaną prostą. Trójkąt ABS jest równoramienny (gdyż $|AS| = |BS| = r$), a więc punkt M, będący spodkiem wysokości w trójkącie ABS, leży w połowie odcinka AB. Zatem $|AM| = 20$.

Obliczymy $|MS|$. Ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |MS| &= \frac{|3\cdot 3+(-4)\cdot 12+(-36)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \\ &= \frac{|9-48-36|}{\sqrt{9+16}} \\ &= \frac{|-75|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{75}{5} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Trójkąt AMS jest prostokątny stąd, na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$r^2 = |AM|^2 + |MS|^2$$

$$r^2 = 20^2 + 15^2$$

$$r^2 = 400 + 225$$

$$r^2 = 625$$

Zatem szukane równanie okręgu to $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$.

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie:

Korzystamy z zależności, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $W(a)$. Stąd otrzymujemy:

$$W(-1) = 20$$

$$4(-1)^3 - 5(-1)^2 - 23(-1) + m = 20$$

$$-4 - 5 + 23 + m = 20$$

$$14 + m = 20$$

$$m = 6$$

Wielomian $W(x)$ ma następującą postać:

$$W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + 6$$

Znajdujemy pierwiastki wielomianu:

$$W(x) = 0$$

$$4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = 0$$

Z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu sprawdzamy wartości podejrzane o bycie pierwiastkami tego wielomianu:

$$W(1) = 4 - 5 - 23 + 6 = -18 \neq 0$$

$$W(-1) = 20 \neq 0$$

$$W(-2) = 4(-2)^3 - 5(-2)^2 - 23(-2) + 6 = -32 - 20 + 46 + 6 = 0$$

Więc $x = -2$ jest pierwiastkiem wielomianu. Dzielimy teraz pisemnie wielomian $W(x)$ przez dwumian $x + 2$:

$$\begin{array}{l}
(4x^3 - 5x^2 - 23x + 6) \quad : \quad (x+2) = 4x^2 - 13x + 3 \\
\underline{-4x^3 - 8x^2} \\
\qquad -13x^2 - 23x + 6 \\
\qquad \underline{13x^2 + 26x} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Wracając do równania:

$$4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(4x^2 - 13x + 3) = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad 4x^2 - 13x + 3 = 0$$

W równaniu kwadratowym wyznaczamy $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121 = 11^2$, więc $\sqrt{\Delta} = 11$ oraz:

$$x_1 = \frac{13 - 11}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{13 + 11}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

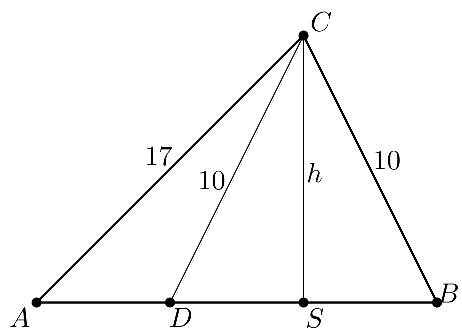
Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są: $-2, \frac{1}{4}, 3$.

Zadanie 9. (*5 pkt*)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D

taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie:



Wprowadzając oznaczenia S - spodek wysokości opuszczonej na bok AB, $|AD| = x$, $|DB| = y$ oraz $|CS| = h$ widzimy, że korzystając ze wzoru na pole trójkąta:

$$P_{ADC} = \frac{1}{2}xh$$

$$P_{DBC} = \frac{1}{2}yh$$

Dostajemy stąd, że stosunek pól tych trójkątów wynosi:

$$\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{\frac{1}{2}xh}{\frac{1}{2}yh} = \frac{x}{y} = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{3}{4}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$P_{ABC} = P_{ADC} + P_{DBC} = \frac{3}{4}P_{DBC} + P_{DBC} = \frac{7}{4}P_{DBC} = \frac{7}{8}yh$$

Ponieważ trójkąt DBC jest równoramienny, więc wysokość opuszczona na jego podstawę dzieli go na połowy. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CSB oraz trójkąta ASC, dostajemy równania:

$$\begin{cases} h^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 10^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + h^2 = 17^2 \end{cases}$$

Z danych zadania $\frac{x}{y} = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{3}{4}$ i wstawiając do powyższego układu, otrzymamy:

$$\begin{cases} h^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 10^2 \\ \left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{2}y\right)^2 + h^2 = 17^2 \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami i korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, dostajemy:

$$-\frac{3}{4}y \cdot \frac{7}{4}y = -7 \cdot 27$$

$$y^2 = 9 \cdot 16$$

$$y = 3 \cdot 4 = 12 \ \vee \ y = -3 \cdot 4 = -12$$

Bierzemy rozwiązanie dodatnie, ponieważ y jest długością boku. Z pierwszego równania mamy:

$$h^2 = 100 - y^2 = 64$$

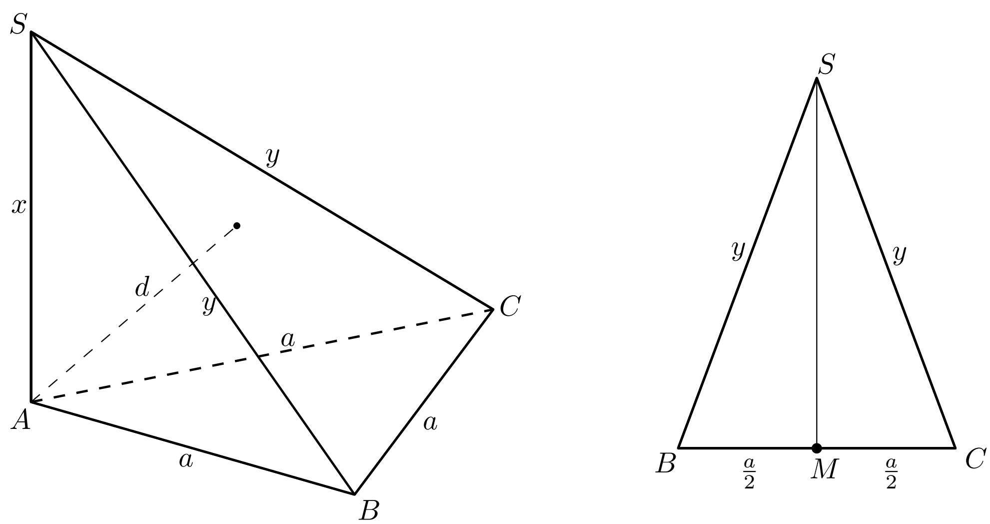
Stąd $h = 8$ lub $h = -8$ i znów bierzemy tylko dodatnie rozwiązanie. Zatem pole trójkąta ABC wynosi:

$$P_{ABC} = \frac{7}{8} \cdot 12 \cdot 8 = 84$$

Zadanie 10. (*4 pkt*)

W ostrosłupie podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:



Niech $x = |AS|$ oraz $y = |BS|$. Trójkąt ABS jest prostokątny, a więc, na mocy twierdzenia Pitagorasa, $y^2 = x^2 + a^2$. Ponadto $|AB| = |AC| = a$ oraz $|\angle BAS| = |\angle CAS| = 90°$. Stąd trójkąty ABS oraz ACS są przystające (cecha bkb). Zatem $|CS| = |BS| = y$, czyli trójkąt BCS jest równoramienny.

Niech M oznacza spodek wysokości w trójkącie BCS opuszczonej z wierzchołka S. Wówczas M dzieli odcinek BC na połowy. Stąd, ponownie na mocy twierdzenia Pitagorasa, mamy:

$$|BM|^2 + |MS|^2 = y^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + |MS|^2 = y^2$$

$$|MS| = \sqrt{y^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Pole trójkąta BCS jest równe $P_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |MS| = \frac{a\sqrt{y^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{a\sqrt{x^2 + a^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{a\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}}{2}$.
Trójkąt ABC jest równoboczny, stąd jego pole jest równe $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Obliczymy x. Obliczając objętość ostrosłupa $ABCS$ na dwa sposoby, mamy:

$$\frac{1}{3} \cdot x \cdot P_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot P_{BCS}$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$x \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = d \cdot \frac{a\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}}{2}$$

$$\sqrt{3}xa = 2d\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}a^2}$$

$$3x^2a^2 = 4d^2x^2 + 3a^2d^2$$

$$x^2(3a^2 - 4d^2) = 3a^2d^2$$

$$x^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2}$$

$$x = ad\sqrt{\frac{3}{3a^2 - 4d^2}}$$

Objętość ostrosłupa wynosi zatem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot P_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot ad\sqrt{\frac{3}{3a^2 - 4d^2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy następujące oznaczenia: Ω – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń, A - zbiór zdarzeń takich, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach jest równy 60.

Zachodzi wzór: $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

Ponieważ kostki są sześcienne, to na każdej z nich możemy otrzymać liczbę naturalną od 1 do 6. Stąd otrzymujemy, że

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6.$$

Obliczymy liczność zbioru A. Możliwymi rozkładami liczby 60 na iloczyn czterech liczb naturalnych od 1 do 6 są: $(1, 2, 5, 6)$, $(1, 3, 4, 5)$ i $(2, 2, 3, 5)$. Pamiętając o konieczności uwzględnienia możliwych permutacji w powyższych rozkładach, otrzymujemy, że

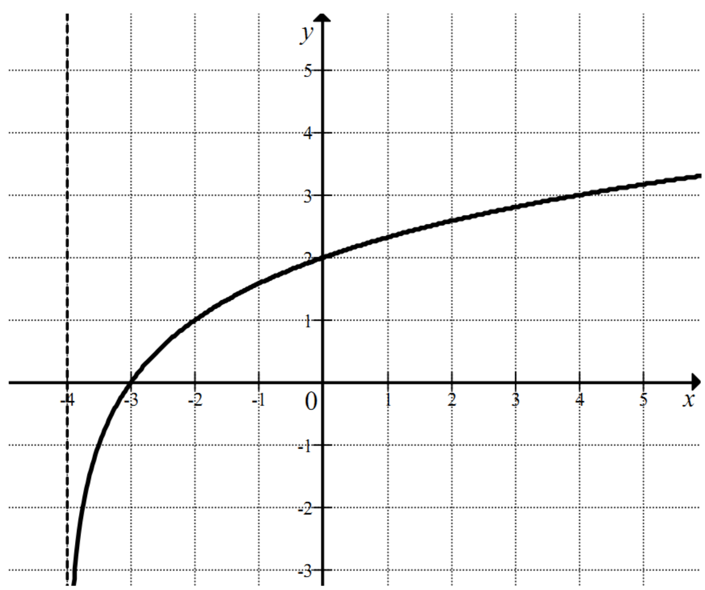
$$\overline{\overline{A}} = 4! + 4! + \frac{4!}{2!} = 24 + 24 + 12 = 60.$$

Podstawiając do wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia A, mamy, że:

$$P(A) = \frac{60}{6^4} = \frac{6 \cdot 10}{6^4} = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{36 \cdot 3} = \frac{5}{108}.$$

Zadanie 12. (*3 pkt*)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.



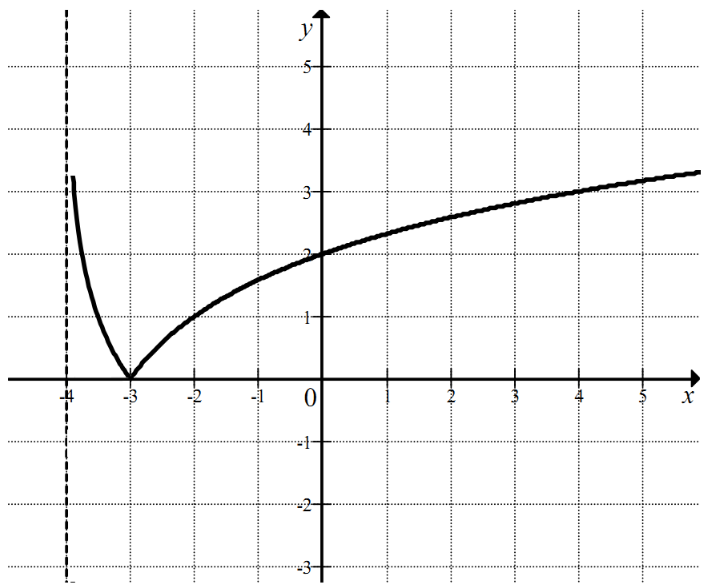
a) Podaj wartość p.
b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.
c) Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

Rozwiązanie:

a) Przedstawiony wykres w zadaniu możemy otrzymać przesuwając wykres funkcji $g(x) = \log_2 x$ o 4 jednostki w lewo, czyli otrzymujemy

$$f(x) = g(x+4) = \log_2(x+4),$$

więc $p = -4$.
b) Poniżej przedstawiony został wykres funkcji $y = |f(x)|$ (tę część wykresu funkcji $y = f(x)$, która leży poniżej osi OX odbijamy symetrycznie względem osi OX).



c) Rozpatrując proste poziome $y = m$, zwracamy uwagę na to w jakich punktach przetną one wykres $y = |f(x)|$. Widzimy stąd, że odcięte punktów przecięcia mają przeciwne znaki gdy proste $y = m$ przecinają oś OY powyżej wartości 2, czyli $m > 2$.